

Grain 2.4 : Synthèse et applications

PIERRICK LOTTON ET MANUEL MELON

Table des matières



I - Introduction	5
II - Test d'entrée	7
III - Tableau de synthèse des analogies	11
A. Analogies acousto-électriques.....	11
B. Analogies mécano-électriques.....	12
IV - Systèmes résonants à 1 degré de liberté	15
A. Le circuit RLC.....	15
B. Fréquence de résonance.....	16
C. Fonction de transfert.....	16
D. Bande passante.....	16
E. Facteur de qualité.....	17
V - Le système masse ressort amorti	19
A. Système masse ressort.....	19
B. Système masse ressort amorti.....	19
C. Schéma électrique équivalent.....	20
D. Exercice.....	21
E. Solution de l'exercice.....	21
VI - Résonateur de Helmholtz	23

Introduction	
A. Le résonateur de Helmholtz.....	23
B. Schéma électrique équivalent.....	24
C. Fréquence de résonance.....	24
D. Exercice.....	24
E. Solution de l'exercice.....	25
VII - Conclusion	27
VIII - Test de sortie	29
IX - Bibliographie	33

Introduction



Objectifs

Ce grain a pour objectifs :

- De présenter de manière synthétique l'ensemble des analogies électro-mécano-acoustiques étudiées dans ce module ;
- D'illustrer l'intérêt de ces analogies à partir de l'étude d'exemples concrets.

Test d'entrée



Exercice 1

Question 1

En régime harmonique, l'impédance électrique d'un condensateur

- est une grandeur réelle
- est inversement proportionnelle à la fréquence
- est proportionnelle à la capacité du condensateur
- est proportionnelle à la pulsation

Question 2

La souplesse d'un oscillateur mécanique linéaire à un degré de liberté

- est inversement proportionnelle à la résistance mécanique
- est inversement proportionnelle à la raideur mécanique
- augmente avec la masse
- dépend de la fréquence

Question 3

Dans l'approximation des constantes localisées, l'impédance acoustique d'un tube, de longueur L , ouvert à ses deux extrémités

Test d'entrée

- est inversement proportionnelle à la fréquence
- est une grandeur réelle
- augmente avec la section du tube
- augmente avec la longueur du tube

Question 4

L'inductance équivalente à deux inductances de valeurs L_1 et L_2 branchées en parallèle vaut :

- $L_1 + L_2$
- $\frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}}$
- $L_1 L_2$
- $\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$

Question 5

Dans l'analogie électromécanique directe, une masse est représentée par :

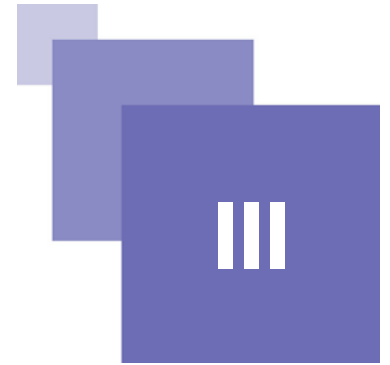
- Une capacité électrique
- une résistance électrique
- une inductance électrique
- un circuit RLC série

Question 6

Une onde acoustique se propage dans un tube dont la section varie brutalement de S_1 à S_2 . Au niveau du changement de section

- la vitesse acoustique se conserve
- la pression acoustique se conserve
- le débit acoustique se conserve
- la célérité du son augmente

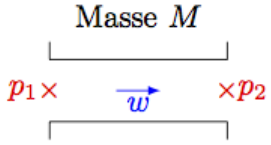
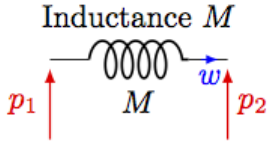
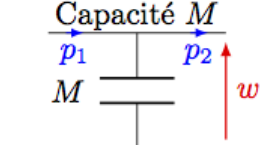
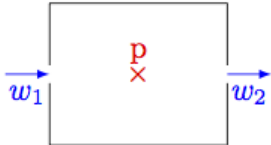
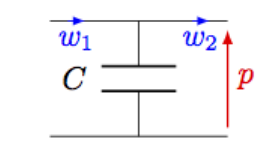
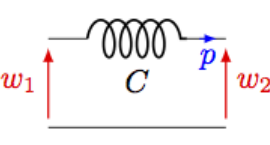
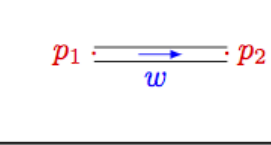
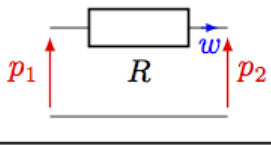
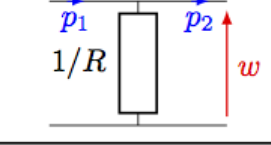
Tableau de synthèse des analogies



Analogies acousto-électriques	11
Analogies mécano-électriques	12

A. Analogies acousto-électriques

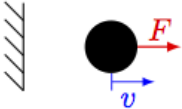
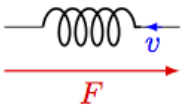
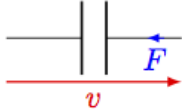
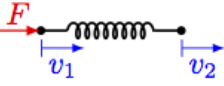
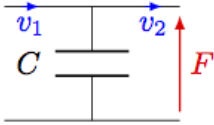
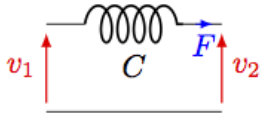
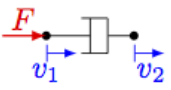
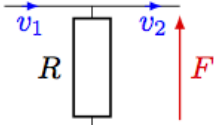
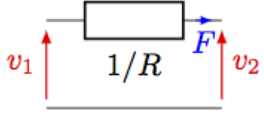
Le tableau ci-dessous présente une synthèse des analogies directes et indirectes entre les domaines acoustique et électrique.

Domaine acoustique	Analogie directe	Analogie indirecte
Pression p	Tension p	Intensité p
Débit w	Intensité v	Tension w
Impédance $Z = \frac{p}{w}$	Impédance électrique Z_a	Admittance électrique Z_a
<p>Masse M</p> 	<p>Inductance M</p> 	<p>Capacité M</p> 
<p>Souplesse C</p> 	<p>Capacité C</p> 	<p>Inductance C</p> 
<p>Résistance $1/R$</p> 	<p>Résistance R</p> 	<p>Conductance R</p> 

Analogies acousto-électriques

B. Analogies mécano-électriques

Le tableau ci-dessous présente une synthèse des analogies directes et indirectes entre les domaines mécanique et électrique.

Domaine mécanique	Analogie directe	Analogie indirecte
Force F	Tension F	Intensité F
Vitesse v	Intensité v	Tension v
Impédance $Z = \frac{F}{v}$	Impédance électrique Z_m	Admittance électrique Z_m
Masse M 	Inductance M 	Capacité M 
Raideur K 	Capacité C 	Inductance C 
Amortisseur R 	Résistance R 	Conductance R 

Analogie mécano-électriques

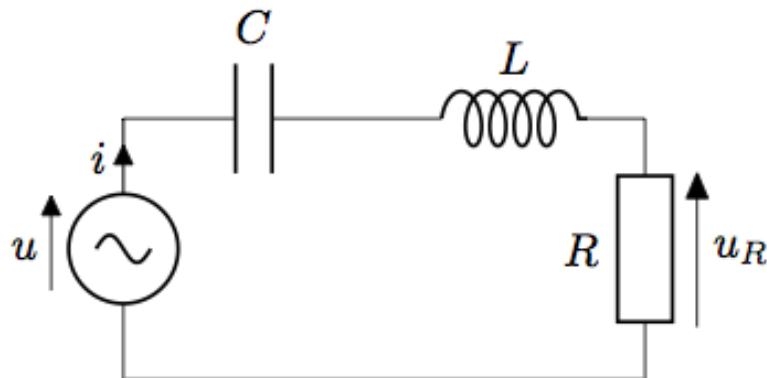
Systemes résonants à 1 degré de liberté

IV

Le circuit RLC	15
Fréquence de résonance	16
Fonction de transfert	16
Bande passante	16
Facteur de qualité	17

A. Le circuit RLC

Considérons le circuit RLC série suivant :



Circuit RLC

L'impédance électrique présentée par les dipôles passifs en série est donnée par :

$$Z_e = \frac{u}{i} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

B. Fréquence de résonance

La résonance est atteinte lorsque l'impédance Z_e est minimale ($Z_e = R$), c'est-à-dire lorsque la partie imaginaire de l'impédance s'annule :

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

Cette condition est satisfaite pour la pulsation de résonance $\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC}}$, ou encore

$$\text{pour la fréquence de résonance } f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

Pour cette fréquence, l'intensité i traversant le circuit est maximale ($i = u/R$) et le déphasage entre tension et courant est nul.

C. Fonction de transfert

A l'aide du pont diviseur de tension, il est possible d'obtenir la fonction de transfert $\frac{u_R}{u}$:

$$\frac{u_R}{u} = \frac{R}{Z_e} = \frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{R} \left(L - \frac{1}{\omega^2 C} \right)}$$

Complément

Plus d'information sur le diviseur de tension *ici*¹

A la résonance du circuit, c'est-à-dire lorsque la partie imaginaire de Z_e est nulle, le module de la fonction de transfert $\left| \frac{u_R}{u} \right|$ est maximal et vaut 1. La tension d'entrée est alors intégralement transmise à la charge R avec un déphasage nul.

D. Bande passante

Le module de la fonction de transfert $\left| \frac{u_R}{u} \right|$ est maximal à la fréquence f_r et diminue de part et d'autre de cette fréquence. Cherchons les fréquences pour lesquelles $\left| \frac{u_R}{u} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, correspondant à une atténuation de 3 dB par rapport à la valeur maximale :

$$\left| \frac{u_R}{u} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{R^2} \left(L - \frac{1}{\omega^2 C} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

1 - <http://subaru.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/electro/potar.html>

Cette condition est satisfaite pour une pulsation de coupure ω telle que $\frac{\omega}{R} \left(L - \frac{1}{\omega^2 C} \right) = \pm 1$ soit encore $LC\omega^2 \pm RC\omega - 1 = 0$. Cette équation du second degré possède les deux solutions positives suivantes :

$$\omega_{b,h} = \frac{\pm R + \sqrt{R^2 C + 4L/C}}{2L}$$

De ces deux pulsations, on tire les expressions des fréquences de coupure basse f_b et haute f_h :

$$f_b = \frac{1}{2\pi} \frac{-R + \sqrt{R^2 C + 4L/C}}{2L} \text{ et } f_h = \frac{1}{2\pi} \frac{R + \sqrt{R^2 C + 4L/C}}{2L}$$

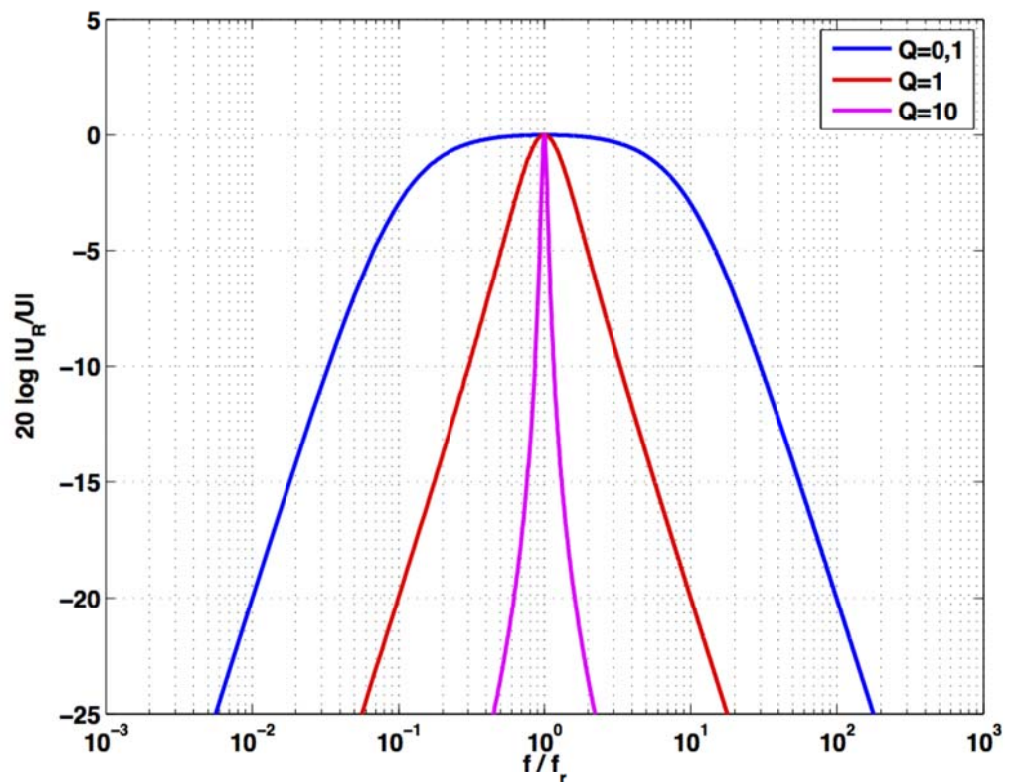
La gamme de fréquence comprise entre f_b et f_h s'appelle la bande passante à -3 dB. Sa largeur vaut $f_h - f_b = R/L$.

E. Facteur de qualité

On définit le facteur de qualité Q comme étant le rapport de la fréquence de résonance sur la largeur de la bande passante :

$$Q = \frac{f_r}{f_h - f_b} = \frac{\omega_r}{\omega_h - \omega_b} = \frac{\sqrt{L}}{R\sqrt{C}}$$

On remarque que plus le facteur de qualité est faible (plus l'amortissement est élevé) plus la bande passante est large. Ce résultat est illustré sur la figure ci-dessous.



Bande Passante



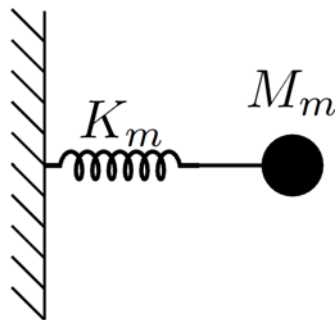
Le système masse ressort amorti

V

Système masse ressort	19
Système masse ressort amorti	19
Schéma électrique équivalent	20
Exercice	21
Solution de l'exercice	21

A. Système masse ressort

Un système "masse ressort" amorti est un oscillateur mécanique à un degré de liberté. Il est constitué d'une masse M_m reliée à un ressort de raideur K_m (ou de souplesse $C_m = 1/K_m$).

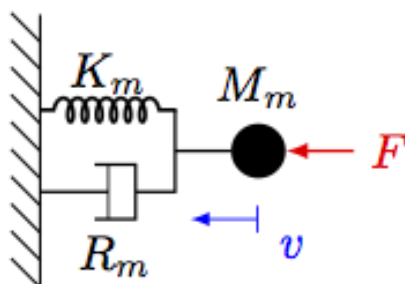


Système "masse ressort"

B. Système masse ressort amorti

L'amortissement est dû aux frottements que subit la masse en mouvement lors de son déplacement dans l'air ainsi qu'aux frottements internes au matériau constituant le ressort. L'effet de l'amortissement est traduit dans la suite par un terme de résistance mécanique R_m .

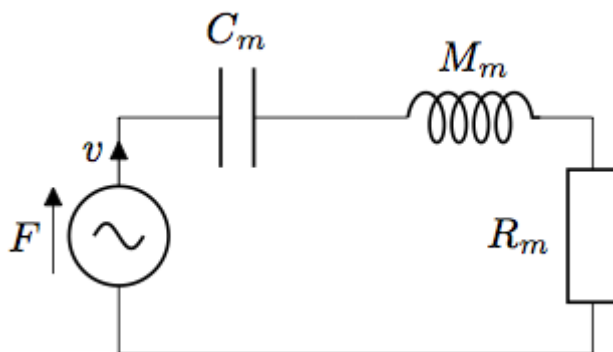
Cet oscillateur est l'équivalent mécanique du système électrique RLC.



Système masse ressort amorti

C. Schéma électrique équivalent

Ainsi, le comportement d'un système masse ressort amorti excité par une force F s'appliquant sur la masse M_m , peut être représenté par le schéma électrique suivant :



Circuit équivalent au système masse ressort amorti

Par analogie avec le circuit RLC, la fréquence de résonance de cet oscillateur mécanique est donnée par :

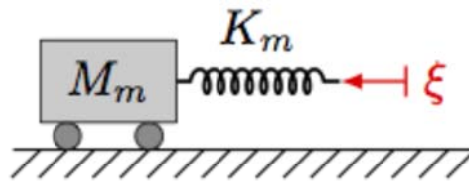
$$f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{M_m C_m}}$$

D. Exercice

Exemple

Considérons le système masse-ressort amorti visible sur l'exemple vidéo ci-dessous. Il est constitué d'un ressort de raideur K_m et d'un charriot de masse M_m guidé sur rails. L'amortissement de ce système masse-ressort est principalement dû aux frottements des roues sur les rails. Le système est excité par une bielle reliée à un moteur, imposant un déplacement d'amplitude constante et de fréquence variable.

Ce système peut être schématisé de la manière suivante :



Système masse ressort amorti excité par une bielle imposant un déplacement constant

Observons la vidéo. Comment évoluent les déplacements relatifs du charriot et du système excitateur entre le cas où la fréquence d'excitation est inférieure à la fréquence de résonance du système (début de la vidéo) et le cas où la fréquence d'excitation est supérieure à la fréquence de résonance (fin de la vidéo) ?

A la fréquence de résonance, l'afficheur à aiguille du moteur indique 420 tours/minute. Sachant que la masse M_m du charriot est de 300 grammes, quelle est la raideur du ressort ?

E. Solution de l'exercice

Exemple

En dessous de la fréquence de résonance, le déplacement de la masse M_m (charriot) est en phase avec le déplacement du système excitateur. Au-delà de la fréquence de résonance, les deux déplacements sont en opposition de phase.

420 tours par minute correspondent à 7 tours par seconde. La fréquence de résonance du système masse-ressort est donc $f_r = 7$ Hz. Sachant que la fréquence de résonance est liée à la masse M_m et à la raideur K_m par la relation :

$$f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{M_m C_m}}$$

la raideur K_m s'écrit $(2\pi f_r)^2 M_m$.

La raideur du ressort vaut donc $(2\pi \times 7)^2 \times 100 \cdot 10^{-3} = 193.4 \text{ N.m}^{-1}$.

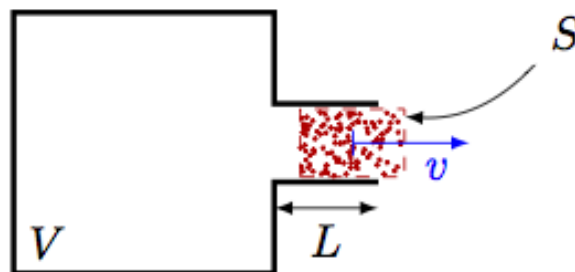
Résonateur de Helmholtz

VI

Le résonateur de Helmholtz	23
Schéma électrique équivalent	24
Fréquence de résonance	24
Exercice	24
Solution de l'exercice	25

A. Le résonateur de Helmholtz

Le résonateur de Helmholtz est un résonateur acoustique de type masse-ressort amorti. Il est constitué d'une enceinte de volume V communiquant avec l'air extérieur par un tube de longueur L et de section S

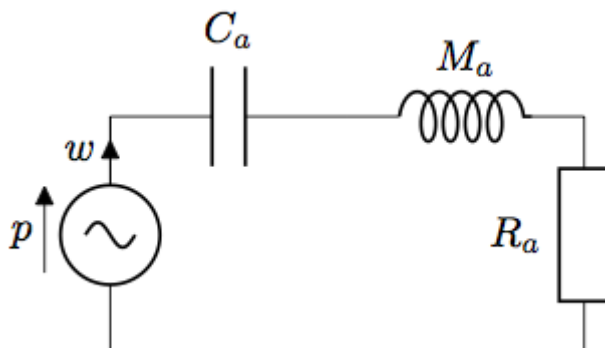


Résonateur de Helmholtz

Dans l'approximation basse fréquence, le tube, ouvert à ses deux extrémités, a pour équivalent une masse acoustique M_a tandis que le volume a pour équivalent une souplesse acoustique C_a . On considérera que les pertes de ce système sont proportionnelles au débit acoustique et auront donc pour équivalent une résistance acoustique R_a .

B. Schéma électrique équivalent

Ainsi, le comportement d'un résonateur de Helmholtz, excité par une pression p , peut être représenté par le circuit électrique équivalent suivant :



Circuit électrique équivalent au résonateur de Helmholtz

où $M_a = \frac{\rho L}{S}$ et $C_a = \frac{V}{\rho c^2}$

Ce circuit série permet de respecter la conservation des pression et débit acoustiques de part et d'autre de la jonction entre le tube et le volume.

C. Fréquence de résonance

Par analogie avec le circuit RLC, la fréquence de résonance du résonateur de Helmholtz est alors donnée par :

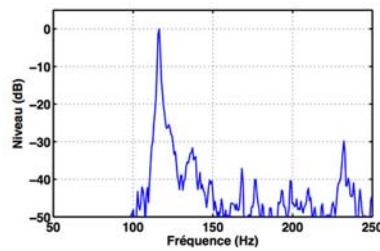
$$f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{M_a C_a}} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{LV}}$$

Cette fréquence dépend de la célérité du son dans l'air et de trois caractéristiques géométriques du résonateur, à savoir son volume V et les longueur L et section S du tube.

D. Exercice

Exemple

Calculer la fréquence de résonance d'une bouteille de Bordeaux (tube de diamètre 1,9 cm et de longueur $L = 7,5$ cm et volume V de 74 cl). Comparer la valeur théorique avec la valeur obtenue en soufflant sur le goulot (voir spectre sur la figure ci-dessous). Donner une piste pour expliquer l'écart observé.



Son obtenu en soufflant dans une bouteille :

E. Solution de l'exercice

Exemple

La fréquence de résonance d'une bouteille de Bordeaux vaut :

$$f_r = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{LV}} = \frac{340}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi \times 0,0095^2}{0,075 \times 0,74 \cdot 10^{-3}}} = 123,7 \text{ Hz}$$

Par lecture graphique, on obtient une valeur comprise entre 115 et 120 Hz (une lecture plus précise donnerait 116,4 Hz). Il y a donc une légère différence de l'ordre de 6%. Cette différence peut s'expliquer par une des hypothèses simplificatrices utilisées pour la démonstration. En effet, nous n'avons pas pris en compte le raccordement des champs de vitesse acoustique intérieur et extérieur au tube. Celui-ci se fait généralement sur une longueur caractéristique de l'ordre du diamètre du trou, la masse du tube apparente est donc un peu plus élevée que celle comprise dans le volume physique du tube. Dans la suite de ce cours, vous étudierez comment prendre cet effet en compte à l'aide de corrections de longueur.

Conclusion

VII

L'équipage mobile d'un haut-parleur électrodynamique, par exemple, se comporte en basses fréquences comme un système masse-ressort amorti. De même, une charge bass-reflex, composée d'un volume et d'un évent, constitue un résonateur de Helmholtz.

D'autres systèmes, a priori difficilement assimilables à un système à éléments localisés, peuvent être modélisés en basses fréquences par un simple oscillateur à un degré de liberté. C'est le cas, par exemple, d'une membrane de microphone, constituée d'un film tendu telle la peau d'un tambour sur un support annulaire. Cette membrane peut être modélisée en basses fréquences par un système mécanique masse-ressort.

Enfin, dans le cas de systèmes plus complexes présentant plusieurs fréquences de résonance, il est dans certains cas possible de les représenter sous la forme d'une association d'oscillateurs simples.

Plusieurs exemples pratiques sont traités dans les modules suivant de ce cours.

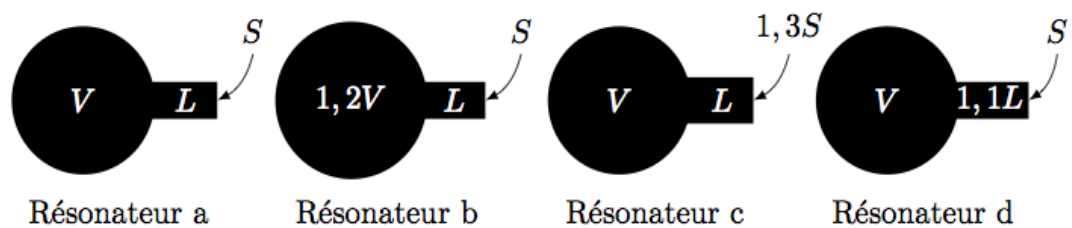
Test de sortie

VIII

Exercice 1

Question 1

Voici quatre résonateurs de Helmholtz, classer leurs fréquences de résonances par ordre croissant.



Résonateurs de Helmholtz

- c d a b
- b d a c
- a d b c
- a c b d

Question 2

Le facteur de qualité d'un oscillateur mécanique amorti

- est inversement proportionnel à la résistance mécanique
- augmente avec la raideur de l'oscillateur
- est proportionnel à la masse de l'oscillateur
- est proportionnel à la largeur de la bande passante

Question 3

On considère un circuit RLC série, de facteur de qualité Q . Parmi les propositions suivantes cocher celles qui sont correctes.

- La largeur de la bande passante diminue quand la valeur de la capacité augmente
- La largeur de la bande passante diminue quand la valeur de l'inductance augmente
- La largeur de la bande passante augmente quand la valeur de la résistance augmente
- La largeur de la bande passante diminue quand le facteur de qualité augmente

Question 4

Un circuit électrique RLC série possède une inductance de valeur 1.2 mH et une résistance de valeur 120Ω , quelle doit être valeur de la capacité pour obtenir une fréquence de résonance égale à 979 Hz ?

- $\approx 2,2 \cdot 10^{-10} \text{ F}$
- $\approx 1,8 \cdot 10^{-7} \text{ F}$
- $\approx 2,2 \cdot 10^{-5} \text{ F}$
- $\approx 1,8 \cdot 10^{-2} \text{ F}$

Question 5

On considère un oscillateur mécanique de masse 1 kg et de souplesse $2 \cdot 10^{-3} \text{ m.N}^{-1}$, calculer la résistance mécanique permettant d'obtenir une bande passante égale à $2f_r$.

$\approx 3,6 \text{ N.s.m}^{-1}$

$\approx 22,4 \text{ N.s.m}^{-1}$

$\approx 44,7 \text{ N.s.m}^{-1}$

$\approx 7,1 \text{ N.s.m}^{-1}$



Bibliographie



IX

- M. Rossi, Electroacoustique, Traité d'électricité de l'école Polytechnique Fédérale de Lausanne, Volume XXI, Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, 1986
- http://uel.unisciel.fr/physique/sinusoi/sinusoi_ch05/co/apprendre_ch5_01.html
- http://uel.unisciel.fr/physique/syst_oscillants/syst_oscillants/co/syst_oscillants.html